第９講　３次のグラフと直線など

9　曲線 $C: y=x^3-3x+3$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　C 上の点 $(2,\ 5)$ における接線 l_1 の方程式を求めよ．また，C と l_1 の交点の x 座標を求めよ．

(2)　点 $(2,\ -3)$ から曲線 C に引いた接線の方程式を求めよ．

(3)　点 $(2,\ k)$ から曲線 C に引いた接線の本数は k の値によってどのように変化するか調べよ．

(4)　点 $(2,\ 1)$ を通る傾き m の直線が，曲線 C と異なる３つの点を共有しているという．その３点を x 座標の小さい方から P，Q，R とするとき，Q が線分 PR の中点となるような m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　３次のグラフと直線など

[9] a, b は正の実数とする．点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ と曲線 $C : y=x^2(x+1)+b$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 点Ｐから曲線 C へ異なる３本の接線が引けるとする．このとき，a, b の間に成り立つ不等式を求めよ．

(2) さらに，(1)の３本の接線のうちの１本と曲線 C との接点の x 座標が $2a$ となるとする（この接線を l とする）．このとき，a, b の満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

(3) 上記の３本の接線のうち，l 以外の２本と曲線 C との接点の x 座標をそれぞれ α, β とする．$(\alpha-\beta)^2$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

(1) ㋐ $b<\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$　㋑ $b>\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$　㋒ $b\leqq\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}$

(2) ㋐ $b=4a^3$ $\left(0<a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$　㋑ $b=4a^3$ $\left(0<a<\dfrac{1}{3}\right)$　㋒ $b=4a^3$ $\left(a>\dfrac{1}{3}\right)$

(3) ㋐ $\dfrac{2}{15}$　㋑ $\dfrac{4}{15}$　㋒ $\dfrac{4}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　3次のグラフと直線など

9　曲線 $C: y=x^3-3x+3$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　C 上の点 $(2,\ 5)$ における接線 l_1 の方程式を求めよ．また，C と l_1 の交点の x 座標を求めよ．

(2)　点 $(2,\ -3)$ から曲線 C に引いた接線の方程式を求めよ．

(3)　点 $(2,\ k)$ から曲線 C に引いた接線の本数は k の値によってどのように変化するか調べよ．

(4)　点 $(2,\ 1)$ を通る傾き m の直線が，曲線 C と異なる3つの点を共有しているという．その3点を x 座標の小さい方からP，Q，Rとするとき，Qが線分PRの中点となるような m の値を求めよ．

【答】　(1) 接線 $l_1: y=9x-13$，交点の x 座標：-4　(2) $y=-3x+3$，$y=24x-51$

(3) $\begin{cases} 1 & (k<-3,\ k>5 \text{ のとき}) \\ 2 & (k=-3,\ 5 \text{ のとき}) \\ 3 & (-3<k<5 \text{ のとき}) \end{cases}$　(4) $m=-1$

【解答】

(1)　$x=2$ において $y'=3x^2-3=9$ より，$l_1: y=9(x-2)+5$　ゆえに　l_1: $\boldsymbol{y=9x-13}$

この直線と曲線 C の式を連立すると

$$x^3-3x+3=9x-13$$
$$(x-2)^2(x+4)=0$$

よって，交点の x 座標は $\boldsymbol{-4}$

(2)　接点の座標を $(t,\ t^3-3t+3)$ とおくと，接線は $y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t+3$

これが点 $(2,\ -3)$ を通るので

$$-3=(3t^2-3)(2-t)+t^3-3t+3$$
$$2t^2(t-3)=0$$
$$\therefore\quad t=0,\ 3$$

よって，$t=0$ のとき接線は $\boldsymbol{y=-3x+3}$，$t=3$ のとき接線は $\boldsymbol{y=24x-51}$

(3)　(2)と同様に，接線 $y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t+3$ が点 $(2,\ k)$ を通るので

$$k=(3t^2-3)(2-t)+t^3-3t+3$$
$$=-2t^3+6t^2-3$$

k を定数とするこの方程式の異なる実数解の個数が，接線の本数に一致する．

ここで $f(t)=-2t^3+6t^2-3$ とおくと，$f'(t)=-6t(t-2)$ より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-3	↗	5	↘

となるので，求める接線の本数は $\begin{cases} \mathbf{1} & (k<-3,\ k>5 \text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (k=-3,\ 5 \text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (-3<k<5 \text{ のとき}) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

⑷　点 (2, 1) を通り，傾き m の直線は $y=m(x-2)+1$ であり，この直線と曲線 C の式を連立すると

$$x^3-3x+3=m(x-2)+1$$
$$x^3-(m+3)x+2m+2=0$$

この3次方程式の実数解を小さい順に α，β，γ とすると，Q が PR の中点となるので

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta \quad \cdots\cdots①$$

となる．

また，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-(m+3) \quad \cdots\cdots③$$
$$\alpha\beta\gamma=-(2m+2) \quad \cdots\cdots④$$

①と②より $\beta=0$ を得る．これと④より $\boldsymbol{m=-1}$

　このとき③より $\gamma\alpha=-2$ となるが，これと $\alpha+\gamma=0$ より $\alpha=-\sqrt{2}$，$\gamma=\sqrt{2}$ となり，$m=-1$ のとき確かに異なる3点を共有していることがわかる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　３次のグラフと直線など

9　a，b は正の実数とする．点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ と曲線 $C: y=x^2(x+1)+b$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　点 P から曲線 C へ異なる３本の接線が引けるとする．このとき，a，b の間に成り立つ不等式を求めよ．

(2)　さらに，(1)の３本の接線のうちの１本と曲線 C との接点の x 座標が $2a$ となるとする（この接線を l とする）．このとき，a，b の満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　上記の３本の接線のうち，l 以外の２本と曲線 C との接点の x 座標をそれぞれ α，β とする．$(\alpha-\beta)^2$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$　　㋑　$b>\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$　　㋒　$b\leqq\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$

(2)　㋐　$b=4a^3\ \left(0<a\leqq\frac{1}{3}\right)$　　㋑　$b=4a^3\ \left(0<a<\frac{1}{3}\right)$　　㋒　$b=4a^3\ \left(a>\frac{1}{3}\right)$

(3)　㋐　$\frac{2}{15}$　　㋑　$\frac{4}{15}$　　㋒　$\frac{4}{5}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑　(3) ㋑

【解答】

(1)　$y=x^3+x^2+b$ より，$y'=3x^2+2x$ となるので C 上の点 $(t,\ t^2(t+1)+b)$ における C の接線は

$$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2+b$$
$$\therefore\quad y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2+b$$

これが $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を通るので

$$0=(3t^2+2t)a-2t^3-t^2+b$$
$$2t^3-(3a-1)t^2-2at-b=0 \quad \cdots\cdots①$$

この方程式が異なる３つの実数解をもつ．ここで

$$f(t)=2t^3-(3a-1)t^2-2at-b$$

とおくと

$$f'(t)=2\{3t^2-(3a-1)t-a\}$$
$$=2(t-a)(3t+1)$$

となり，$f(t)$ が極値をもつので $a\neq-\frac{1}{3}$ であり，このとき $a>0$ より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘		↗

となるので

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\begin{cases} \text{極大値}\quad f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{27}-b>0 & \cdots\cdots② \\ \text{極小値}\quad f(a)=-a^3-a^2-b<0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

となる．a，b は正より③は常に成り立つ．よって②より

$$\boldsymbol{b<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}}$$

⑵　方程式①は $t=2a$ を解にもつので

$$b=2(2a)^3-(3a-1)(2a)^2-2a\cdot 2a \qquad \therefore\quad b=4a^3$$

これを⑴の結果に代入すると

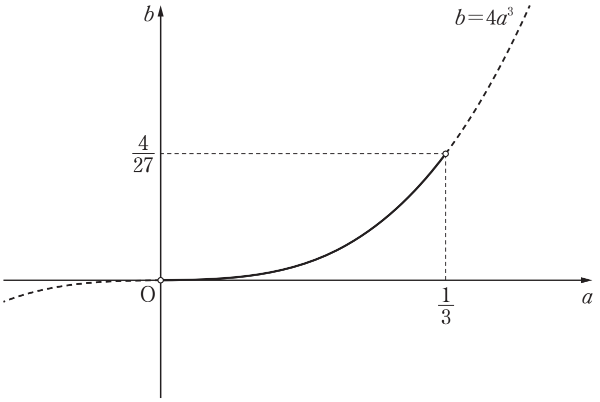
$$b<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}\quad \text{より}\quad 4a^3<\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$$

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{6}\right)^2<0$$

$$0<a<\frac{1}{3}\qquad (a>0\ \text{より})$$

よって a，b の満たす条件は　$\boldsymbol{b=4a^3}$　$\left(\boldsymbol{0<a<\dfrac{1}{3}}\right)$

点 $(a,\ b)$ の存在範囲は下図の実線部分.



⑶　$b=4a^3$ より，①は

$$2t^3-(3a-1)t^2-2at-4a^3=0$$

$$(t-2a)\{2t^2+(a+1)t+2a^2\}=0$$

したがって，α，β は $2t^2+(a+1)t+2a^2=0$ の２解であるから

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &=\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2-4a^2\\ &=-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\\ &=-\frac{15}{4}\left(a-\frac{1}{15}\right)^2+\frac{4}{15}\end{aligned}$$

よって，$0<a<\dfrac{1}{3}$ の範囲で $(\alpha-\beta)^2$ は $a=\dfrac{1}{15}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{15}}$ をとる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。